数理解析研究所講究録
268巻 1976年 44-51

Almost homeomorphic 3-manifolds

北大 教養 小林一章

ここでは C.H. Edwards, JR. [1] によって与えられた次の定理の別証明を与えます。

定理. M_1, M_2をコンパクト3次元多様体とする。もし$\mathrm{Int}\,M_1$と$\mathrm{Int}\,M_2$が位相同形ならばM_1とM_2は位相同形である。

上の定理の証明に次の補題を使います。

補題1. Fを連結閉曲面とし$(W; F, F)$をコンパクト3次元 h-cobordism とすると $\partial\varphi \equiv \varphi|\partial W$ が位相写像となるようなホモトピー同値写像 $\varphi: W \longrightarrow F \times I$ がある。

定義. 3次元多様体Mの中の任意のコンパクト可縮な3次元部分多様体が3次元 ball D^3に位相同形のときMを(C.P.)-多様体という。

補題2. $(W; F, F)$をコンパクト3次元 h-cobordism としWは(C.P.)-多様体, Fは連結閉曲面とするならばWは$F \times I$と位相同形である。

補題3．Fを連結な閉曲面とすると$F\times I$は(C, P.)－多様体である。

補題1の証明） 今$\partial W=\partial_-W\cup\partial_+W=F\cup F$ とかく．Wは h-cobordism だから deformation retraction $f: W \searrow \partial_-W$ がある。collar theorem より$U(\partial_-W)\cong F\times I$（ここで$U(\partial_-W)\equiv U(\partial_-W, W)$は$\partial_-W$のWにおける正則近傍）．そこで deformation retraction $\tilde{f}: W \searrow U(\partial_-W)$ で $\tilde{f}(\partial_+W)\subset\partial_+U(\partial_-W)$ なるものがあるとしてよい。（ここで$\partial U=\partial_-U\cup\partial_+U=\partial_-W\cup\partial_+U$ とかく） $U(\partial_-W)\cong F\times I$ だから $g: U(\partial_-W)\rightarrow F\times I$ を位相写像とすると $\tilde{\varphi}\equiv g\tilde{f}: W\longrightarrow F\times I$ はホモトピー同値写像で $\tilde{\varphi}|\partial_-W$ は位相写像，$(\tilde{\varphi}|\partial_+W)_*: \pi_1(\partial_+W)\rightarrow\pi_1(F\times\{1\})$ は同形写像になっている。従って$(\tilde{\varphi}|\partial_+W)$ は位相写像 $\psi: \partial_+W\longrightarrow F$ にホモトピック 即ち $\Phi_0=(\tilde{\varphi}|\partial_+W)$, $\Phi_1=\psi$ となるホモトピー $\Phi: \partial_+W\times I\longrightarrow F\times I$ が存在する。

$$\varphi=\begin{cases}\Phi & \text{on } U(\partial_+W)\cong F\times I\\ \tilde{\varphi} & \text{on } W-\mathring{U}(\partial_+W)\end{cases}$$

と定義する事によって，φは求めるホモトピー同値写像になっている。

補題2の証明） Fについての次の様な列を作ります。

$F=F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_{p+1}$

α_i: properly embedded 2-sided simple arc or simple closed curve in F_i $(1\leqq i\leqq p)$

$F_{i+1}=F_i-\mathring{U}(\alpha_i,F_i)$

F_{p+1}: disjoint union of 2-balls

（特に後の index 2 の embedded surgery のため $p\geqq 2$ としておく）．　補題1によってWから$F\times I$へのホモトピー同値写像 $f: W\longrightarrow F\times I$ で $\partial f\equiv f|\partial W$ が位相写像になっているものがある。$\alpha_i\times I$ は $F\times I$ に自然に埋め込まれているとし，fが各$\alpha_i\times I$ に transversal になるようにしておくと，∂fが位相写像だから $f^{-1}(\alpha_i\times I)$ はWに proper に埋め込まれた連結な2次元曲面．

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f} & F\times I \\ i\uparrow & \circlearrowright & \uparrow j \\ f^{-1}(\alpha_i\times I) & \xrightarrow{f} & \alpha_i\times I \end{array}$$

ここでi, jは包含写像

$f|f^{-1}(\alpha_i\times I)=f'$ とおくと∂fが位相写像だから

$f'_*:\pi_1(f^{-1}(\alpha_i\times I))\longrightarrow\pi_1(\alpha_i\times I)$ は epimorphism．

$\alpha\in\ker f'_*$ は $i_*(\alpha)=0$ だからα_iがFで 2-sided curve だという事を使うとWの中に埋め込まれた 2-ball D^2 で $D^2\cap f^{-1}(\alpha_i\times I)=\partial D^2$ となるものがある。しかも $\alpha_i\times I$ が$F\times I$で 2-sided，

従って $f^{-1}(\alpha_i \times I)$ が W で 2-sided である事と上の可換な図式より $\mathring{D}^2 \cap \bigcup_{j \neq i} f^{-1}(\alpha_j \times I) = \phi$ と仮定してよい。 この $\mathring{D}^2$ を使い次のような index 2 の embedded surgery を行ない α を消去する。先ず写像 g を $W - \mathring{U}(D^2, W)$ 上で次のように定義する。

$g | W - \mathring{U}(D^2, W) = f | W - \mathring{U}(D^2, W)$ ここで D^2 の正則近傍 $U(D^2, W)$ を十分小さくとっておくと $U(D^2, W) \cap f^{-1}(\alpha_i \times I)$ は $U(D^2, W)$ に proper に埋め込まれた annulus A である。
$U(D^2, W)$ の中に proper に埋め込まれた2つの disjoint 2-ball D_1, D_2 で $\partial A = \partial D_1 \cup \partial D_2$, $A \cap D_i = \partial D_i$ $(i=1,2)$ となっているものを選ぶ。 $\alpha \in \ker f'_*$ より g を $g(D_i) \subset \alpha_i \times I$ になるように $D_1 \cup D_2$ 上に拡大出来る。次に $\pi_2((F - \bigcup_i \alpha_i) \times I) = 0$ より $U(D^2, W)$ の中の残りの3つの balls に対し g を拡大する事が出来，結局写像 $g : W \longrightarrow F \times I$ が得られ

$g | W - \mathring{U}(D^2, W) = f | W - \mathring{U}(D^2, W)$

$g^{-1}(\alpha_i \times I) = (f^{-1}(\alpha_i \times I) - \mathring{A}) \cup (D_1 \cup D_2)$ となっている。

しかも $f(U(D^2, W)) \cup g(U(D^2, W)) \subset (F - \bigcup_{j \neq i} \alpha_j) \times I$
そして最初の仮定 $p \geq 2$ より $\bigcup_{j \neq i} \alpha_j \neq \phi$ 従って $\pi_3(F - \bigcup_{j \neq i} \alpha_j) = 0$、それ故 $g \simeq f$. このようにして W の境界では動かさないホモトピーの範囲内の変形で $\alpha \in \ker f'_*$ を消去した。この操作をくり返して $\ker f'_*$ を消去し，次の①，②を満足するホモトピー同値写像 $\tilde{g} : W \longrightarrow F \times I$ を得る。

① $\partial\tilde{g}=\partial f$（位相写像） ② $\tilde{g}|\tilde{g}^{-1}(\alpha_i\times I)$ は位相写像．
更にこのような事を全ての $\alpha_i\times I$ に対して行ない．次のようなホモトピー同値写像 $\tilde{h}$ を得る。

$\tilde{h}: W\longrightarrow F\times I$ ∋ ⓐ $\tilde{h}\simeq f$ keeping ∂ fixed

ⓑ $\tilde{h}|\tilde{h}^{-1}(\alpha_i\times I): \tilde{h}^{-1}(\alpha_i\times I)\longrightarrow \alpha_i\times I$ は全てのiに対し位相写像になっている。

すると $(F-\bigcup_i \mathring{U}(\alpha_i,F))\times I=F_{p+1}\times I$ は3-balls の disjoint union だから $W-\bigcup_i \mathring{U}(\tilde{h}^{-1}(\alpha_i\times I),W)$ は3次元コンパクト可縮な多様体であり，Wは仮定によって(C.P.)-多様体だから全て3次元 ball になる。そこで $\hat{h}=\tilde{h}|\bigcup_i U(\tilde{h}^{-1}(\alpha_i\times I),W)$ とおいて $\hat{h}$ を cone extension technique で位相写像

$h: W\longrightarrow F\times I$ に拡大すればよい。

補題3の証明）．Fについての次のような列を取ります。

$F=F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_{p+1}$

α_i: properly embedded simple arc or simple closed curve in F_i $(1\leqq i\leqq p)$.

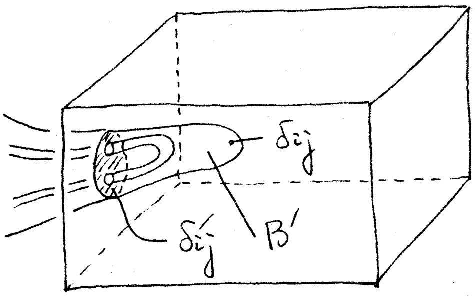
$F_{i+1}=F_i-\mathring{U}(\alpha_i,F_i)$

F_{p+1} : 2-balls の disjoint union

Vを $F\times I$ の中のコンパクト可縮な3次元部分多様体とする。

従って∂Vは2次元球面S^2と位相同形，各$\alpha_i \times I$ と∂Vが trans-versal に交わるようにしておくと

$(\alpha_i \times I) \cap \partial V = \{\beta_{i1}, \cdots, \beta_{ip_i}\}$ は simple closed curves の集合である。今β_{ij}が∂Vの中での inner-most curve であるとする（$\bigcup_{i,j} \beta_{ij}$ の中には必らず∂V の中での inner-most curves があるが任意のiに対して$\beta_{i1}, \cdots, \beta_{ip_i}$ の中に∂Vの中での innermost curve があるとは限らない）.



すると次のような2-balls $\delta_{ij} \subset \partial V$, $\delta'_{ij} \subset \alpha_i \times I$ がある。即ち $\partial \delta_{ij} = \beta_{ij} = \partial \delta'_{ij}$,
$\delta_{ij} \cap \bigcup_{p,q} \beta_{p,q} = \beta_{ij}$.

そこで$(F - \mathring{\bigcup}(\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_p)) \times I = F_{p+1} \times I$ （3-balls の dis-joint union）の中の1つの3-ball B がδ_{ij}を含む。Schoenflies の定理によってδ_{ij}はBを2つの3-ballsに分ける。δ'_{ij}を含む方をB'とする。B'を使う事により$F \times I$の境界（$F \times \{0\} \cup F \times \{1\}$）を動かさない$F \times I$のイソトピーにより交わり$\beta_{ij}$を消去する。このとき$\delta_{ij}$と交わっていた$\{\beta_{ik}\}$も同時に消去される。この操作を有限回行なう事により$(F \times \{0\}) \cup (F \times \{1\})$ を動かさない$F \times I$の isotopy の範囲内の変形で$\partial V \cap \bigcup_i (\alpha_i \times I) = \phi$ と出来る。従ってVは$F_{p+1} \times I$の中の1つ

の3-ball に含まれるから Schoenflies の定理より $V \cong D^3$ が証明され、従って $F \times I$ は (C.P.)-多様体である。

定理の証明). $h: \mathrm{Int}\, M_1 \longrightarrow \mathrm{Int}\, M_2$ を位相写像とする。

$c_i: \partial M_i \times I \longrightarrow M_i$ $(i=1,2)$ を M_i の boundary collars とする。即ち c_i は embedding で $c_i(x,0)=x$ $(x \in \partial M_i)$ となっている。すると $h(M_1 - c_1(\partial M_1 \times [0,1))) \subset M_2$ であり，しかも $hc_1(F_{1j} \times \{1\}) \subset c_2(F_{2j} \times (0,1))$ となっているとすると $(W_j; hc_1(F_{1j} \times \{1\}), F_{2j})$ は h-cobordism（ここで F_{ij} $(i=1,2)$ は ∂M_i の連結成分） W_j の次元は3だから F_{1j} と F_{2j} は位相同形. これから先ず ∂M_1 と ∂M_2 が位相同形である事が証明される。そこで上の h-cobordism を簡単に $(W; F, F)$ とかくと $W \subset F \times I$ となっており，F は連結閉曲面. すると補題3から $F \times I$ は (C.P.)-多様体，そこで W も (C.P.)-多様体になる. 何故なら V を W の中のコンパクト可縮な3次元部分多様体とすると $F \times I$ が (C.P.)-多様体だから V は D^3 と位相同形. 従って W は (C.P.)-多様体. すると補題2より W は $F \times I$ に位相同形. 従って h を位相写像 $H: M_1 \longrightarrow M_2$ に拡張出来る。従って $M_1 \cong M_2$ が証明された。

Reference

C. H. Edward Jr : *Concentricity in 3-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc, vol. 113 (1964), 406 ~ 423.